Ida y vuelta de Álgebras a Variedades: el ejemplo de variedades tóricas

Michela Artebani, Paola Comparin

Primera Escuela de Postgrado en Matemática
Universidad de La Frontera
28-31 de mayo de 2024
Lican Ray (Chile)

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
- **Clase 2.** Morfismos
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
- **Clase 4.** Morfismos tóricos

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
  [notas de Andreas Gathmann, capítulo 1]
- **Clase 2.** Morfismos
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
- **Clase 4.** Morfismos tóricos

Definición

Sea k un campo. El n-espacio afín *sobre k es*

$$\mathbb{A}^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in k\}.$$

Definición

Dado un conjunto $S \subset R = k[x_1, \ldots, x_n]$ definimos

$$V(S) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \text{ para cada } f \in S\}.$$

Los subconjuntos de $\mathbb{A}^n$ de la forma $V(S)$ se llaman **conjuntos algebraicos***.*

Ejemplos. Los siguientes son conjuntos algebraicos:

- $\mathbb{A}^n = V(0)$, $\emptyset = V(1)$.
- Un punto $p = (a_1, \ldots, a_n) = V(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.
- $V(xy) \subset \mathbb{A}^2$.
- La curva $C = V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2$.
- Los subespacios lineales de $\mathbb{A}^n$.
- El cono cuádrico $X = V(xz - y^2) \subset \mathbb{A}^3$.

Definición

- *Un subconjunto* $S \subset R = k[x_1, \ldots, x_n]$ *es un* **ideal** *de* R *si* S *es cerrado con respecto a la suma y a la multiplicación por elementos de* R.
- *Dado un subconjunto* $S \subset R$*, definimos el ideal:*

$$(S) = \{f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n : f_i \in S,\ g_i \in R\}.$$

Definición

Dado un ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ *definimos su lugar de ceros*

$$V(I) := \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \textit{ para cada } f \in I\}.$$

Observación.

- $V(S) = V((S))$.
- $V(x_1) = V(x_1^2)$.

Teorema. En $k[x_1, \dots, x_n]$ cualquier conjunto algebraico está definido por un conjunto finito de polinomios.

Teorema. Si R es un anillo Noetheriano, luego tambien $R[x]$ es Noetheriano. [1]

Dem.

- Supongamos que $I \subset R[x]$ es un ideal no finitamente generado. Definimos $f_i \in I$ de la forma siguiente.
- $f_0 \neq 0$ es un elemento de I de grado minimo. f_{i+1} es un elemento de grado minimo de $I \setminus (f_0, \dots, f_i)$.
- $\deg f_i \leq \deg f_{i+1}$ por construccion.

[1] A. Gathmann, Commutative Algebra, class notes, https://agag-gathmann.math.rptu.de/commalg, Proposition 7.13 and Remark 7.15

Dem.

- Para cada i, sea $a_i \in R$ el coeficiente de grado maximo de f_i y sea $I_i = (a_0, \ldots, a_i) \subset R$.
- Como R es Noetheriano, existe $m > 0$ tal que $I_m = I_{m+1} = \cdots$.
- Luego $a_{m+1} = \sum_{i=0}^{r} r_i a_i$, con $r_i \in R$ para cada i. Sea

$$f = f_{m+1} - \sum_{i=0}^{r} x^{\deg f_{m+1} - \deg f_i} r_i f_i.$$

- Como $f_{m+1} \in I \setminus (f_0, \ldots, f_m)$, luego $f \in I \setminus (f_0, \ldots, f_m)$.

Dem.

- Por construcción $\deg f < \deg f_{m+1}$, así que f_{m+1} no es un elemento de grado minimo que no pertenece a $(f_0, \dots, f_m)$. Una contraddición.
- Luego $R[x]$ es Noetheriano.

□

Proposición. Sea k un campo y $R = k[x_1, \dots, x_n]$.

1. Si $S_1 \subset S_2 \subset R$, entonces $V(S_2) \subset V(S_1)$.
2. Si $\{S_i\}$ es una familia de subconjuntos de R, luego $\cap_i V(S_i) = V(\cup_i S_i)$.
3. $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$.

1. Si $S_1 \subset S_2 \subset R$, entonces $V(S_2) \subset V(S_1)$.
   Dem. Si $p \in V(S_2)$, luego $f(p) = 0$ para cada $f \in S_2 \supset S_1$, así que $p \in V(S_1)$.
2. Si $\{S_i\}$ es una familia de subconjuntos de R, luego $\cap_i V(S_i) = V(\cup_i S_i)$.
   Dem. $p \in \cap_i V(S_i) \iff p \in V(S_i)$ para cada $i \iff f(p) = 0$ para cada $f \in \cup_i S_i \iff p \in V(\cup_i S_i)$.

3. $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$.

Dem. Si $p \in V(S_1) \cup V(S_2)$, para cada $f_1 \in S_1$, $f_2 \in S_2$,

$\Rightarrow$ o bién $f_1(p) = 0$ o bién $f_2(p) = 0$

$\Rightarrow$ $f_1(p) f_2(p) = 0$, así que $p \in V(S_1 S_2)$.

Si $p \notin V(S_1) \cup V(S_2)$,

$\Rightarrow$ existen $f_1 \in S_1$ y $f_2 \in S_2$ tales que $f_1(p) \neq 0$, $f_2(p) \neq 0$,

$\Rightarrow$ $f_1(p) f_2(p) \neq 0$ así que $p \neq\in V(S_1 S_2)$.

$\square$

Definición

- *La* **topología de Zariski** *sobre* $\mathbb{A}^n$ *es la topología cuyo conjuntos cerrados son los conjuntos algebraicos de* $\mathbb{A}^n$.
- *Cada subconjunto* $X \subset \mathbb{A}^n$ *tiene la topología inducida por la topología de Zariski. Esta es la* topología de Zariski de X.

Ejemplo ($\mathbb{A}^1$)

Recordamos que cada ideal $I \subset k[x]$ es principal: $I = (f)$ para algún $f \in k[x]$. Luego

$$V(I) = V(f) = \{p \in \mathbb{A}^1 : f(p) = 0\}.$$

En particular $V(I)$ es finito.
Por otro lado si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, entonces $X = V((x - x_1)\cdots(x - x_n))$, así que los conjuntos cerrados de $\mathbb{A}^1$ son $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ y todos los conjuntos finitos.

Observación. Del ejemplo anterior se deduce que cualquier biyección $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ es continua en la topología de Zariski.

Definición

Dado un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *definimos el* **ideal de** X

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(p) = 0 \text{ para cada } p \in X\}.$$

Observación. Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ luego

$$X \subseteq V(I(X)).$$

Lema. $V(I(X)) = X$ si y solo si X es algebraico.
Dem.
$\Rightarrow$: obvio
$\Leftarrow$: Si $X = V(J)$ entonces $I(X) \supseteq J$, así que $V(I(X)) \subseteq V(J) = X$.

Observación. Si $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ideal luego

$$I \subseteq I(V(I)).$$

Observación. Si $I = (x^2)$, $I(V(I)) = (x) \neq I$.

Definición

Sea I un ideal de un anillo R. El **radical** *de I es*

$$\sqrt{I} = \{f \in R : f^n \in I \text{ para algún } n \text{ entero positivo}\}.$$

Ejemplo

- $\sqrt{\langle 24 \rangle} = \langle 6 \rangle$ en $\mathbb{Z}$;
- $\sqrt{\langle x^2, xy^2, y^3 \rangle} = \langle x, y \rangle$ en $k[x, y]$;

Observación. $J \subseteq \sqrt{J}$ para cada ideal J.

Observación. Si $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal luego

$$\sqrt{I} \subseteq I(V(I)).$$

Teorema. Sea k un campo algebraicamente cerrado.

1. cada ideal maximal de $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma

$$I(p) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

   con $p = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathbb{A}^n$.
2. para cada $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ideal propio, entonces $V(I) \neq \emptyset$.
3. para todo ideal $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$,

$$\sqrt{I} = I(V(I)).$$

1. cada ideal maximal de $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ es de la forma

$$I(p) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

   con $p = (a_1, a_2, \ldots a_n) \in \mathbb{A}^n$.
   Dem. $I(p)$ es maximal, para probar el viceversa [Hulek, Elementary Algebraic Geometry, Thm 1.16].
2. para cada $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ideal propio, entonces $V(I) \neq 0$.
   Dem. Si k es un campo y $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal propio entonces $I \subseteq m$ para algún ideal maximal m. En particular si k es algebraicamente cerrado entonces $\emptyset \neq V(m) \subseteq V(I)$.

3. para todo ideal $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$,

$$\sqrt{I} = I(V(I)).$$

Dem.
Sea $f \in I(V(I))$. Queremos probar que $f^N \in I$ por algún N.
Consideramos el ideal

$$I_1 := I + \langle ft - 1 \rangle \subseteq k[x_1, \dots, x_n, t].$$

$V(I_1) = V(I) \cap V(ft-1) \subseteq V(f) \cap V(ft-1) = \emptyset$ en $\mathbb{A}^{n+1}$. Luego $1 \in I_1$ o sea

$$1 = (ft-1)g_0 + \sum_i f_i g_i$$

con $g_i \in k[x_1, \dots, x_n, t]$ y $f_i \in I$.

Si reemplazamos $t = 1/f$ en la ecuación anterior y eliminamos los denominatores multiplicando por f^N, con N entero positivo, obtenemos

$$f^N = \sum_i f_i g_i'$$

con los $g_i' \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Luego $f^N \in I$, así que $f \in \sqrt{I}$. □

Definición

Un ideal J se dice **radical** *si $J = \sqrt{J}$.*

Corolario. Si k es un campo algebraicamente cerrado entonces las siguientes son biyecciones una inversa de la otra.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subconjuntos} \\ \text{algebraicos de } \mathbb{A}^n \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales radicales} \\ \text{de } k[x_1, \ldots, x_n] \end{array} \right\}$$

$$X \longmapsto I(X)$$

$$V(I) \longleftarrow I$$

Ejemplo

Consideramos el ideal de $\mathbb{Q}[x,y]$ dado por:

$$I = \langle x^2 - 4y^5 - 6y^4 - y^3 - y,\ xy^3,\ y^6 + 2y^5 + y^4 \rangle.$$

Para calcular $V(I)$ ocupamos el siguiente programa magma.

```
R<x,y>:=PolynomialRing(Rationals(),2);
I:=Ideal([x^2-4*y^5-6*y^4-y^3-y, x*y^3, y^6+2*y^5+y^4]);
PrimaryDecomposition(I);
Variety(I);
```

En todo lo que sigue k es un campo algebraicamente cerrado.

Definición

Un conjunto algebraico X es **reducible** *si*

$$X = X_1 \cup X_2$$

con X_1 y X_2 conjuntos algebraicos propios de X. Si X no es reducible se llama **irreducible**.

Ejemplo

- $\mathbb{A}^1_k$ con la topología de Zariski es irreducible porque los conjuntos cerrados propios de $\mathbb{A}^1_k$ son conjuntos finitos y $\mathbb{A}^1_k$ contiene infinitos elementos (porque k es algebraicamente cerrado).
- $V(x_1 \cdot x_2) = V(x_1) \cup V(x_2)$ es reducible.

Observación. Sea $X = X_1 \cup X_2$ un conjunto algebraico reducible de $\mathbb{A}^n$. Luego

$$I(X) = I(X_1) \cap I(X_2).$$

Dem. Sea $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$. $f \in I(X_1 \cup X_2)$ si y solo si $f(x) = 0$ para todo $x \in X_1$ y todo $x \in X_2$, lo cual pasa si y solo si $f \in I(X_1) \cap I(X_2)$.

Definición

Una **variedad afín** X *es un conjunto algebraico irreducible de* $\mathbb{A}^n$*.*

Ida y vuelta de Álgebras a Variedades: el ejemplo de variedades tóricas

Michela Artebani, Paola Comparin

Primera Escuela de Postgrado en Matemática
Universidad de La Frontera
28-31 de mayo de 2024
Lican Ray (Chile)

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
- **Clase 2.** Morfismos [Notas de Andreas Gathmann, Capitulos 3 y 4]
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
- **Clase 4.** Morfismos tóricos

Definición

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *un conjunto algebraico. Su* **anillo de las coordenadas** *es:*

$$A(X) := k[x_1, \dots, x_n]/I(X).$$

Observación: Un elemento $f \in A(X)$ determina una función $f : X \to k$ que es la función nula si y solo si $f = [0]$.

Proposición. X es una variedad afín (o sea es irreducible) si y sólo si $A(X)$ es un dominio entero.

Dem. de $\Rightarrow$

Si $I(X)$ no es primo, entonces existen $f_1, f_2 \in k[x_1, \dots, x_n]$ tales que $f_1 f_2 \in I(X)$ pero $f_1, f_2 \notin I(X)$. Sean $J_i := I(X) + (f_i)$ y $X_i = V(J_i)$, $i = 1, 2$. Tenemos que

- X_1, X_2 son cerrados de Zariski contenidos en X;
- $X_i \subsetneq X$, $i = 1, 2$ porque $I(X) \subsetneq \sqrt{J_i}$ ($f_i \notin I(X)$);
- $X_1 \cup X_2 = X$ porque

$$V(J_1) \cup V(J_2) = V(J_1 J_2) = V(I(X) + (f_1 f_2)) = V(I(X)) = X.$$

Luego X es reducible.

□

Observación. Dada una k-algebra finitamente generada y dominio entero A existe una variedad afín cuyo anillo de coordenadas es isomorfo a A:

$$A \cong k[x_1, \ldots, x_n]/I = A(V(I)).$$

Ejemplos.

- $A(\mathbb{A}^n_k) = k[x_1, \ldots, x_n]$.
- Si $X = V(x_1x_2 - 1) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ entonces

$$A(X) = k[x_1, x_2]/(x_1x_2 - 1) \cong k[t, t^{-1}].$$

- Si $X = V(x_1^2 - x_2^3) \subseteq \mathbb{A}^2_k$ entonces

$$A(X) = k[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^3) \cong k[t^3, t^2].$$

Sea X una variedad afín y sea U un abierto de X.

Definición

Una **función regular en** U *es una función* $\varphi : U \to k$ *tal que para cada* $a \in U$ *existe un abierto* $U_a \subseteq U$ *con* $a \in U_a$ *y* $f, g \in A(X)$ *con* $g \neq 0$ *tales que*

$$\varphi = \frac{f(x)}{g(x)}, \ \forall x \in U_a.$$

El conjunto de todas las funciones regulares en U se denota con $\mathcal{O}_X(U)$ y es una k-algebra.

Observación. Si dos funciones regulares $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_X(U)$ coinciden en un abierto $V \subseteq U$, entonces coinciden en todo U, de hecho

$$V \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq U \Longrightarrow U = \overline{V} \subseteq V(f_1 - f_2) \subseteq U.$$

Proposición. (Proposición 3.8, Gathmann)

- $\mathcal{O}_X(X) = A(X)$.
- $\mathcal{O}_X(X \backslash V(f)) \cong A(X)_f = \{\frac{g}{f^r} : g \in A(X), r \in \mathbb{N}\}$.

Ejemplo. $\mathcal{O}_X(\mathbb{A}^1_k - \{0\}) \cong k[x]_x = k[x, x^{-1}]$.

Ejemplo. Si $U := \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ entonces

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2) = k[x,y].$$

Claramente $k[x,y] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2) \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U)$. Por otro lado $U = \mathbb{A}^2 \backslash V(x) \cup \mathbb{A}^2 \backslash V(y)$, así que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(U) \subseteq k[x,y]_x \cap k[x,y]_y = k[x,y] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2).$$

$\square$

Ejemplo. Sea $X = V(x_1x_2 - x_3x_4) \subseteq \mathbb{A}^4_k$ y sea $U = X \setminus V(x_2, x_3)$. La siguiente es una función regular en U:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1}{x_3} & \text{si } x_3 \neq 0 \\ \frac{x_4}{x_2} & \text{si } x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Sean X, Y variedades afines y sea $U \subseteq X$ un abierto.

Definición

Una función $f : U \to Y$ es un **morfismo** *si:*

- *es continua;*
- *para cada abierto $V \subseteq Y$ y cada $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$ se cumple que $\varphi \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.*

La función es un **isomorfismo** *si es un morfismo biyectivo cuya inversa es un morfismo.*

Notación: $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$.

Teorema. Los morfismos $f : U \to Y$ son exactamente las funciones de la forma:

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \to Y,\ x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

donde $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$ para cada $i = 1, ..., n$.
En particular los morfismos $U \to \mathbb{A}^1$ son exactamente las funciones de $\mathcal{O}_X(U)$.

Dem.

- Sea f un morfismo. Las funciones coordenadas $\varphi_i : Y \to k, y \mapsto y_i$ pertenecen a $\mathcal{O}_Y(Y)$, luego $f_i := f^*(\varphi_i) \in \mathcal{O}_X(U)$, y estas son las componentes de f.
- Viceversa, sea $f = (f_1, \dots, f_n)$ con $f_i \in O_X(U)$. Si $C = V(g_1, \dots, g_r)$ es un cerrado de Y, luego $f^{-1}(C) = V(g_1 \circ f, \dots, g_r \circ f)$ es un cerrado de U porqué $g_i \circ f$ son funciones regulares de U (remplazamos localmente cocientes de polinomios en las variables de un polinomio). De forma similar, si $\varphi \in \mathcal{O}_Y(V)$, entonces

$$f^*(\varphi)(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

es regular. $\square$

Definición

- *Dadas dos variedades afines* X, Y *denotamos por* $\mathrm{Mor}(X, Y)$ *el conjunto de los morfismos* $X \to Y$.
- *Dadas dos* k*-algebras* A, B *denotamos por* $\mathrm{Hom}_k(A, B)$ *el conjunto de los homomorfismos de* k*-algebras* $A \to B$.

Proposición. Sean X, Y variedades afines. Hay una biyección

$$\psi\colon \mathrm{Mor}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_k(A(Y),A(X)) \qquad f \mapsto f^*$$

Además $(id_X)^* = id_{A(X)}$ y $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Corolario. $X \cong Y$ si y sólo si $A(X) \cong A(Y)$.

Demostración. Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m$, así que

$$A(X) = k[x_1, \dots, x_n]/I(X), \qquad A(Y) = k[y_1, \dots, y_m]/I(Y).$$

Probamos que ψ es inyectiva: si $f^* = g^*$ entonces
$f_i = y_i \circ f = f^*(y_i) = g^*(y_i) = y_i \circ g = g_i$ para cada i, así que $f = g$.

Mostramos que ψ es sobreyectiva. Si $\varphi\colon A(Y) \to A(X)$ es un homomorfismo de k-algebras denotamos por $h_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ un representante de $\varphi(y_i)$. La función $f\colon X \to \mathbb{A}^m$ definida por

$$f(x_1, \dots, x_n) := (h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$$

es un morfismo que no depende de la elección de los representantes. La imagen de f está contenida en Y porque si $g \in I(Y)$, luego $g(h_1, \dots, h_m) = g(\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_m)) = \varphi(g(y_1, \dots, y_n)) = 0$. Además $f^*(y_i) = h_i = \varphi(y_i)$, así que $f^* = \varphi$ y la proposición queda probada. $\square$

Hemos definido un funtor contravariante entre la **categoría de las variedades afines** y la **categoría de las k-algebras finitamente generadas** que sean dominios enteros:

$$X \mapsto A(X)$$

$$(f : X \to Y) \mapsto (f^* : A(Y) \to A(X)).$$

Por las propiedades en las diapositivas 5 y 16 es una **equivalencia de categorias**. Llamaremos Spec el inverso de este funtor.

En particular hay una biyección:

$$\{\text{ variedades afines }\}/\cong\ \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}k\text{-algebras}\\ \text{finitamente}\\ \text{generadas y}\\ \text{dominio entero}\end{array}\right\}/\cong$$

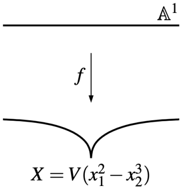
$$X \longmapsto A(X)$$

Ejemplo. Sea $X = V(x_1^2 - x_2^3) \subseteq \mathbb{A}_k^2$. Recordamos que hay un homomorfismo

$$A(X) = k[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^3) \to k[t^3, t^2] \to k[t].$$

Este define el morfismo

$$\mathbb{A}_k^1 \to X,\ t \mapsto (t^3, t^2).$$



Sin embargo $X \not\cong \mathbb{A}_k^1$ porque $A(X) \not\cong k[t]$ dado que $A(X)$ no es un UFD.

Morfismos

Sesión Magma

```
> A<[x]>:=AffinePlane(Rationals());
> C:=Scheme(A,x[1]^2-x[2]^3);
> IsIrreducible(C);
true
> Dimension(C);
1
> IsNonSingular(C);
false
> B<t>:=AffineSpace(Rationals(),1);
> f:=map<B->C|[t^3,t^2]>;
> IsIsomorphism(f);
false
```

Ida y vuelta de Álgebras a Variedades: el ejemplo de variedades tóricas

Michela Artebani, Paola Comparin

Primera Escuela de Postgrado en Matemática
Universidad de La Frontera
28-31 de mayo de 2024
Lican Ray (Chile)

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
- **Clase 2.** Morfismos
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
- **Clase 4.** Morfismos tóricos

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
- **Clase 2.** Morfismos
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
  [Cox, Little, Schenck: *Toric varieties*, §1.1, §1.2, §1.3]
- **Clase 4.** Morfismos tóricos

Definición

Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. *El* **toro complejo** n**-dimensional** *es el grupo algebraico*

$$T^n = (\mathbb{C}^*)^n$$

con la multiplicación por componentes.

Observación. T^n tiene estructura de variedad afín:

$$T^n = \operatorname{Spec}(R)$$

con

$$R = \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_{n+1}]/(t_1 \cdots t_{n+1} - 1) = \mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}].$$

Al toro T^n podemos asociar dos **reticulados** (grupos abelianos libres finitamente generados):

Definición

El **grupo de caracteres** *de* T^n *es*

$$M = \{\chi : T^n \to \mathbb{C}^* : \chi \text{ morfismo y homomorfismo de grupos}\}$$

Ejemplo. $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ define

$$\chi^a : T^n \to \mathbb{C}^*, \chi(t_1, \ldots, t_n) = t_1^{a_1} \cdots t_n^{a_n}$$

y se prueba que $M \cong \mathbb{Z}^n$.

Definición

El **grupo de subgrupos a 1-parametro** *de* T^n *es*

$$N = \{\lambda : \mathbb{C}^* \to T^n : \lambda \textit{ morfismo y homomorfismo de grupos}\}.$$

Ejemplo. $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ define

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to T^n, \lambda(t) = (t^{b_1}, \ldots, t^{b_n})$$

y se prueba $N \cong \mathbb{Z}^n$.
Observación. $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ y

$$M \times N \to \mathbb{Z},\ (\chi, \lambda) \mapsto \langle \chi, \lambda \rangle.$$

Definición

El grupo de subgrupos a 1-parametro *de* T^n *es*

$$N = \{\lambda : \mathbb{C}^* \to T^n : \lambda \textit{ morfismo y homomorfismo de grupos}\}.$$

Ejemplo. $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ define

$$\lambda : \mathbb{C}^* \to T^n, \lambda(t) = (t^{b_1}, \ldots, t^{b_n})$$

y se prueba $N \cong \mathbb{Z}^n$.
Observación. $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ y

$$M \times N \to \mathbb{Z},\ (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Definición

Una **variedad tórica** *es una variedad algebraica* X *de dimensión* n *que admite un abierto* U *isomorfo al toro* T^n *tal que la acción del toro se extiende a una acción*

$$T^n \times X \to X$$

.

Ejemplo

$X = \mathbb{C}^2$ es una variedad tórica afín: el abierto $U \subset \mathbb{C}^2$ está dado por

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \cong T^2$$

y la acción de T^2 en $X = \mathbb{C}^2$ es dada por

$$T^2 \times X \to X$$

$$(t_1, t_2), (x_1, x_2) \mapsto (t_1 x_1, t_2 x_2)$$

Ejemplo

El cono cuádrico $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid xz = y^2\}$ es una variedad tórica afín, contiene el toro $T^2 = X \cap (\mathbb{C}^*)^3$ a través del isomorfismo $(t_1, t_2) \to (t_1, t_2, t_2^2/t_1)$ y la acción de T^2 en X está dada por

$$T^2 \times X \to X, \quad (t_1, t_2), (x, y, z) \mapsto (t_1 x, t_2 y, t_2^2/t_1 z).$$

Ejemplo

La variedad $V = V(xy - zw)$ es una variedad tórica afín, contiene el toro $T^3 = V \cap (\mathbb{C}^*)^4 = \{(t_1, t_2, t_3, t_1 t_2/t_3), t_i \in \mathbb{C}^*\}$ y la acción de T^3 en V está dada por

$$(t_1, t_2, t_3), (x, y, z, w) \mapsto (t_1 x, t_2 y, t_3 z, t_1 t_2/t_3 w).$$

Ejemplo

La curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^3 = y^2\}$ es una variedad tórica afín, contiene el toro $T = C \cap (\mathbb{C}^*)^2 = \{(t^2, t^3) : t \in \mathbb{C}^*\} \cong \mathbb{C}^*$ y la acción de T en C está dada por

$$T \times C \to C, \quad (t), (x, y) \mapsto (t^3 x, t^2 y).$$

Observación. Se trata de una variedad no normal.

Construir variedades tóricas afines con semigrupos:

Definición

- *Un* **semigrupo afín** *es un semigrupo abeliano* $(S, +)$ *finitamente generado y que se puede ver adentro de un reticulado* M*.*
- *La* **algebra de semigrupo** $\mathbb{C}[S]$ *es el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial con base* S *y multiplicación inducida por la estructura de semigrupo.*

Recordando que

$$M = \{\chi : T^n \to \mathbb{C}^* : \chi \text{ morfismo y homomorfismo de grupos}\}$$

es el grupo de caracteres del toro, la algebra de semigrupo $\mathbb{C}[S]$ es

$$\mathbb{C}[S] = \bigoplus_{m \in S} \mathbb{C}\chi^m, \quad \chi^m \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}.$$

Proposición. [CLS, Prop. 1.1.14]
Sea $S \subseteq M$ un semigrupo afín con $M = \mathbb{Z}S$. Entonces

- $\mathbb{C}[S]$ es un dominio entero y una $\mathbb{C}$-algebra finitamente generada.
- $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es una variedad tórica afín de dimensión $\mathrm{rk}(M)$.

Dem.

- $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$ y S finitamente generado implican que $\mathbb{C}[S]$ es un dominio entero y finitamente generado.
- $T^n = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$
- $\mathbb{C}[S] \subseteq \mathbb{C}[M]$ induce $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M]) \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$.

- $T^n = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M])$ actúa en X: el homomorfismo de álgebras

$$\mathbb{C}[S] \to \mathbb{C}[M] \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[S], \ \chi^s \mapsto \chi^s \otimes \chi^s$$

induce la acción

$$T^n \times X \to X.$$

$\square$

Ejemplo

Si consideramos el semigrupo afín $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Z}^n$,

$$\mathbb{C}[\mathbb{N}^n] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

donde $x_i = \chi^{e_i}$, $\{e_i\}$ base canónica de $\mathbb{Z}^n$.
$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{N}^n])$ es $\mathbb{C}^n$, variedad tórica de dimensión n.

Ejemplo

Si consideramos el semigrupo afín $S = \langle \pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n \rangle = \mathbb{Z}^n$,

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$$

y $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es el toro $T^n = (\mathbb{C}^*)^n$, variedad tórica de dimensión n.

Ejemplo

Si consideramos el semigrupo afín en $\mathbb{Z}$ generado por 2 y 3:
$S = \{0, 2, 3, \ldots\}$,

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[t^2, t^3] = \mathbb{C}[x, y]/(x^3 - y^2)$$

$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$ es $X = V(x^3 - y^2)$, variedad tórica de dimensión 1.

Definición

Un **cono (racional polihedral)** *es el par* (σ, N), *con* $N \cong \mathbb{Z}^n$ *un reticulado y* $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ *un cono generado por un número finito de elementos* $n_1, \ldots, n_r \in N$*:*

$$\sigma = \mathrm{cone}(n_1, \ldots, n_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i n_i : \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\};$$

tal que $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ *(***fortemente convexo***, i.e. no contien rectas por el origen).*

Dado el cono (σ, N) le podemos asociar el **cono dual** $\sigma^\vee$ en $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$:

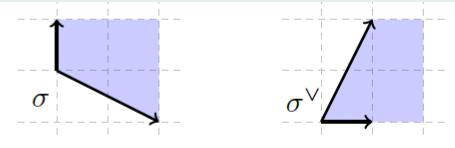
$$\sigma^\vee = \{m \in M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} : \langle m, u \rangle \geq 0 \text{ para todo } u \in \sigma\}.$$

Ejemplo

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ generado por $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.
El cono dual $\sigma^\vee$ está generado por e_1, e_2.

Ejemplo

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ generado por $2e_1 - e_2 = (2, -1), e_2 = (0, 1)$.



El cono dual $\sigma^\vee$ es generado por $e_1 = (1, 0), e_1 + 2e_2 = (1, 2)$.

Observación. Cada cono es intersección de un número finito de semi-espacios cerrados.

A un cono (σ, N) se puede asociar una variedad tórica afín:

Lema. $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ es un semigrupo afín finitamente generado.

Dem.

Semigrupo: $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \subset M$.

Finitamente generado (Gordan's Lemma):

$\sigma^\vee$ es cono, sean $v_1, \ldots, v_s \in M$ sus generadores. Sea

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i : 0 \leq \delta_i < 1 \right\}.$$

Se trata de una región limitada de $M_\mathbb{R}$, y entonces $K \cap M$ es finito.

El conjunto $\{v_1, \ldots, v_s\} \cup (K \cap M)$ es finito y genera S_σ:

$$s = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{s} \lfloor \lambda_i \rfloor v_i + \sum_{i=1}^{s} \delta_i v_i,$$

con $\lfloor \lambda_i \rfloor \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \delta_i < 1$. $\square$

Teorema. Sea un cono (σ, N) con semigrupo $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Entonces

$$X_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

es una variedad tórica afín.
El (abierto isomorfo al) toro es $T = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[M])$ y actúa sobre $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$, i.e.

$$T \times X_\sigma \to X_\sigma.$$

Ejemplos de Variedades tóricas afines

Ejemplo

La variedad tórica asociada al cono nulo $\{0\} \subset N_{\mathbb{R}}$ es el toro T^n: el dual de $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ es $\{0\}^\vee = \mathbb{R}^n$, $S_{\{0\}} = \mathbb{Z}^n$, los generadores sono $\pm e_i, i = 1, \ldots, n$ y y ya vimos que $X_{\{0\}} = T^n$.

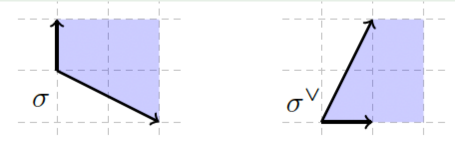
Ejemplo

La variedad tórica asociada al cuadrante positivo $\sigma = \mathbb{R}^n_{\geq 0} \subset N_{\mathbb{R}}$ es $\mathbb{C}^n$: si $\sigma = \mathbb{R}^n_{\geq 0} \subset N_{\mathbb{R}}$ entonces $\sigma^\vee = \sigma$. Sigue que $S_\sigma = (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$, $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ y $X_\sigma = \mathbb{C}^n$.

Ejemplos de Variedades tóricas afines

Ejemplo

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ generado por $2e_1 - e_2 = (2, -1), e_2 = (0, 1)$.



El cono dual $\sigma^\vee$ es generado por $e_1 = (1, 0), e_1 + 2e_2 = (1, 2)$ y el semigrupo S_σ es generado por $e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2$.
Sigue que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, x_1x_2^2] \cong \mathbb{C}[x, y, z]/(xz - y^2)$$

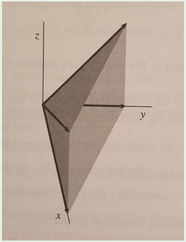
y $X_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : xz = y^2\}$.

Observación. Hay una diferencia entre los generadores del cono $\sigma^\vee$ (rayos) y los generadores de S_σ.

Ejemplos de Variedades tóricas afines

Ejemplo

Sea $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ el cono generado por $e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_3$.
El cono dual es $\sigma^\vee$ generado por $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3$



El semigrupo S_σ es generado por $e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 - e_3$. Sigue que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_1 x_2 / x_3] \cong \mathbb{C}[x, y, z, w]/(xy - zw)$$

y $X_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = V(xy - zw)$.

Con magma

Ejemplo

```
sigma:=Cone([[1,0],[0,1]]);
Rays(Dual(sigma));
X<[x]>:=ToricVariety(Rationals(), Fan(sigma));
X;

sigma:=Cone([[1,0,0],[0,1,0],[1,0,1],[0,1,1]]);
Rays(Dual(sigma));
X<[x]>:=ToricVariety(Rationals(), Fan(sigma));
X;
```

Ida y vuelta de Álgebras a Variedades: el ejemplo de variedades tóricas

Michela Artebani, Paola Comparin

Primera Escuela de Postgrado en Matemática
Universidad de La Frontera
28-31 de mayo de 2024
Lican Ray (Chile)

Contenido del Minicurso

- **Clase 1.** Variedades afines
- **Clase 2.** Morfismos
- **Clase 3.** Variedades tóricas afines y semigrupos
- **Clase 4.** Morfismos tóricos [Cox, Little, Schenck, *Toric varieties*, §1.3]

Recordamos que el toro $T^n = (\mathbb{C}^*)^n$ tiene estructura de variedad afín:

$$T^n \cong V(x_1 \cdots x_{n+1} - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}_{\mathbb{C}}$$

con anillo de las coordenadas

$$\begin{aligned} A(T^n) &\cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{n+1}]/(x_1 \cdots x_{n+1} - 1) \\ &\cong \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] \\ &\cong \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]. \end{aligned}$$

- Sea $\varphi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ un homomorfismo de grupos.
- Este define un homomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras:

$$\bar{\varphi} : \mathbb{C}[\mathbb{Z}^m] \to \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n], \quad x^v \mapsto y^{\varphi(v)}.$$

- Por la correspondencia vista en la Clase 2, este induce un morfismo de variedades afines:

$$\mathrm{Spec}(\bar{\varphi}) : T^n \to T^m, \quad y \mapsto (y^{\varphi(e_1)}, \ldots, y^{\varphi(e_m)}).$$

- **Observación:** $\mathrm{Spec}(\bar{\varphi})$ es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo.

- Sea $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $\varphi(x, y) = (2x - y, y)$.
- Luego $\bar{\varphi} : \mathbb{C}[\mathbb{Z}^2] \to \mathbb{C}[\mathbb{Z}^2]$ es

$$x_1 \mapsto y_1^2, \quad x_2 \mapsto y_1^{-1} y_2.$$

- El morfismo inducido es

$$\mathrm{Spec}(\bar{\varphi}) : T^2 \to T^2, \ (y_1, y_2) \mapsto (y_1^2, y_1^{-1} y_2).$$

Recordamos que una variedad tórica afín se puede construir como sigue:

- Sea S un semigrupo afín (abeliano, finitamente generado)
- Sea $\mathbb{C}[S]$ el álgebra de semigrupo asociada

$$\mathbb{C}[S] = \mathbb{C}[x^m : m \in S].$$

- $X_S := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S])$.

Podemos construir morfismos entre ellas con la idea anterior:

- Sea $\varphi : S_1 \to S_2$ un homomorfismo de semigrupos.
- Este define un homomorfismo de $\mathbb{C}$-algebras:

$$\bar{\varphi} : \mathbb{C}[S_1] \to \mathbb{C}[S_2], \quad x^v \mapsto y^{\varphi(v)}.$$

- Por la correspondencia vista en la Clase 2, este induce un morfismo de variedades afines:

$$\mathrm{Spec}(\bar{\varphi}) : X_{S_2} \to X_{S_1}.$$

Observación: El homomorfismo φ se puede extender a un homomorfismo entre los grupos $M_1 = \mathbb{Z}S_1 \to \mathbb{Z}S_2 = M_2$. Luego hay diagramas conmutativos

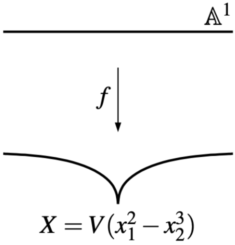
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}[S_1] \arrow[r, "\bar{\varphi}"] \arrow[d] & \mathbb{C}[S_2] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{Spec}}{\rightsquigarrow}"] & X_{S_1} & X_{S_2} \arrow[l, "\mathrm{Spec}(\bar{\varphi})"'] \\
\mathbb{C}[M_1] \arrow[r] & \mathbb{C}[M_2] & T_1 \arrow[u] & T_2 \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Ejemplo. Sean $S_1 = \langle 2, 3 \rangle$ y $S_2 = \mathbb{N}$.

- Tenemos que $\mathbb{C}[S_1] = \mathbb{C}[t^2, t^3] \cong \mathbb{C}[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^3)$. Luego

$$X_{S_1} \cong V(x_1^2 - x_2^3),\ X_{S_2} = \mathbb{A}^1.$$

- Sea $i : S_1 \to \mathbb{N}$ la inclusión.
- Luego $\bar{i} : \mathbb{C}[x_1, x_2]/(x_1^2 - x_2^3) \cong \mathbb{C}[S_1] \to \mathbb{C}[\mathbb{N}]$ es $x_1 \mapsto t^3$, $x_2 \mapsto t^2$.
- El morfismo tórico inducido es la normalización:



$$\mathrm{Spec}(\bar{i}) : \mathbb{A}^1 \to X,\ t \mapsto (t^3, t^2).$$

Definición

Sean X_1, X_2 variedades tóricas afines con toros T_1, T_2 respectivamente. Un **morfismo tórico** *$f : X_1 \to X_2$ es un morfismo tal que*

- *$f(T_1) \subseteq T_2$,*
- *$f_{|T_1} : T_1 \to T_2$ es un homomorfismo de grupos.*

Teorema. [Proposición 1.3.14, Cox-Little-Schenck]
Todos los morfismos tóricos $X_{S_2} \to X_{S_1}$ provienen de homomorfismos de semigrupos $\varphi : S_1 \to S_2$.

Sean $\sigma_1 \subseteq (N_1)_{\mathbb{R}}, \sigma_2 \subseteq (N_2)_{\mathbb{R}}$ dos conos fuertemente convexos y racionales poliedrales y sean X_1, X_2 las variedades tóricas afines asociadas:

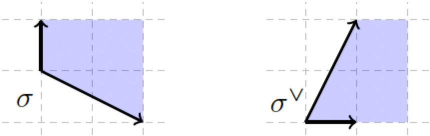
$$X_i = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i^\vee \cap M_i]), \; i = 1, 2.$$

Proposición. Un homomorfismo de grupos $\psi : N_1 \to N_2$ tal que

$$\psi_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subseteq \sigma_2$$

define un morfismo tórico $X_1 \to X_2$.

Sea $\sigma = \mathrm{Cone}((2,-1),(0,1))$. Luego $\sigma^\vee = \mathrm{Cone}((1,0),(1,2))$.



El semigrupo S_σ es generado por e_1, e_1+e_2, e_1+2e_2. Sigue que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, x_1x_2^2] \cong \mathbb{C}[x,y,z]/(xz-y^2)$$

y $X_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : xz - y^2 = 0\}$.

Consideramos el homomorfismo de grupos

$$\psi : \mathbb{Z}^2 \to N,\ e_1 \mapsto (2,-1),\ e_2 \mapsto (0,1).$$

- $\psi_{\mathbb{R}}$ lleva el primer cuadrante $\tau = \mathrm{Cone}((1,0),(0,1))$ al cono σ, luego $\psi^\vee$ lleva $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ a $S_\tau = \mathbb{N}^2$.
- Esto induce un homomorfismo de álgebras

$$\mathbb{C}[S_\sigma] \to \mathbb{C}[S_\tau],$$

$$x \mapsto y_1^2,\ y \mapsto y_1 y_2,\ z \mapsto y_2^2,$$

donde $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x,y,z]/(xz - y^2)$ y $\mathbb{C}[S_\tau] = \mathbb{C}[y_1, y_2]$.

- Finalmente este define el morfismo tórico

$$F_\sigma := \mathbb{C}^2 \to X_\sigma,\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1^2, y_1 y_2, y_2^2).$$

- Observamos que F_σ es un cubrimiento de grado 2: $F(y_1, y_2) = F(-y_1, -y_2)$. Esto se debe al hecho que hay una sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

En general, dado un cono $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$ cuyo rayos están generados por $v_1, \ldots, v_r \in N$, se puede definir el homomorfismo

$$\psi : \mathbb{Z}^r \to N, \; e_i \mapsto v_i.$$

Este define un morfismo tórico

$$F_\sigma : \mathbb{C}^r \to X_\sigma$$

que es el cociente por la acción de un semi-toro $T^\ell \times G$, donde $\ell = r - n$ y G es un grupo abeliano finito.

Morfismos tóricos

Una sesión Magma para encontrar las ecuaciones de la variedad tórica afín asociada a un cono:

Magma

```
Equations := function(n,R)
N := ToricLattice(n);
C := Cone(R);
H := HilbertBasis(Dual(C));
M := [LaurentPolynomial([h],[1]): h in H];
A := AffineSpace(Rationals(),#H);
T := ToricVariety(Rationals(),Fan(Cone(Zero(N))));
f := map<T->A|M>;
return Image(f);
end function;
```

Referencias

Gathmann, A.
Class notes Algebraic Geometry.
https://agag-gathmann.math.rptu.de/de/alggeom.php

Cox, D.; Little, J.; Schenck, H.
Toric varieties.
Graduate Studies in Mathematics, 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

Referencias

Fulton, W.
Introduction to toric varieties.
Annals of Mathematics Studies, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

Hausen, J.
A video course on toric varieties.
https://www.math.uni-tuebingen.de/user/hausen/TV-Video-Course/tv-video-course.pdf

Bosma, W.; Cannon, J.; Playoust, C.
The Magma algebra system. I. The user language.
Computational algebra and number theory (London, 1993), J. Symbolic Comput. 24, 1997, 3-4, 235–265.
Magma calculator: http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/